Fenômenos de Transporte

Ementa

- Definição, conceito e mecanismos de Fenômenos de Transporte
- Conceitos fundamentais e análise dimensional
- Estática dos Fluidos
- Equações fundamentais para o movimento dos fluidos
- Formulação integral e diferencial para o volume de controle - as equações de Navier-Stokes
- Camada limite
- Semelhança
- Escoamento interno de fluidos incompressíveis

Conteúdo programático

I Fundamentos dos Fenômenos de Transporte
Definição de Fenômenos de Transporte
Propriedades dos Fluidos
Unidades e dimensões
Recomendações: Apostila grandezas Físicas (site)
Problemas do capítulo 1 do Brunetti, Levi e Munson

II Estática dos Fluidos
Conceito de pressão: princípio de Pascal
Equação geral da estática dos fluidos
Aplicações da equação da estática: movimento relativo circular e retilíneo

Recomendações: Resolver problemas do capítulo 2 do Brunetti, Munson e do capítulo 3 do Livi

III Cinemática dos Fluidos
Tipos de Escoamentos
Referencial Euleriano e Lagrangeano: aceleração de uma partícula fluida
Equação da continuidade
Função de corrente e função potencial
Recomendações: Resolver problemas dos capítulos 3 e 11 do Brunetti

IV Dinâmica dos Fluidos
Origem das forças em dinâmica dos fluidos
Propriedades das Tensões em um fluido
Equação do movimento de um fluido
Teorema de Bernoulli: aplicações
Equação de Navier-Stokes: aplicações
Recomendações: Resolver problemas do capítulo 6 do Munson, 5 do Livi e 11 do Brunetti

Provas

Primeira prova (I e II): 3 de março
Segunda prova (III): 12 de abril
Terceira prova (IV): 22 de maio
Reavaliação: 24 de maio
Final: 29 de maio

tilibra

Bibliografia

- Mecânica dos Fluidos - Franco Brunetti
- Fundamentos de Fenômenos de Transporte - Celso P. Livi
- Introdução à Mecânica dos Fluidos - Robert W. Fox e Alan T. McDonald
- Fundamentos da Mecânica dos Fluidos - B.R. Munson, D.F. Young e T.H. Okiishi
- Mecânica dos Fluidos - Frank M. White

Algumas definições importantes

- **Grandeza física**

É tudo aquilo que envolve medidas.
Uma grandeza de mesma espécie é uma que possui mesma unidade.
Exemplos: Tempo, massa, temperatura, comprimento
Grandezas de base
Massa, Tempo, volume, comprimento
Grandezas derivadas
Velocidade, aceleração, densidade

- **Dimensão**

Expressão geral que representa uma grandeza como produto das potências dos fatores que representam as grandezas base.
Exemplos: densidade → $M.L^{-3}$
aceleração → $M.T^{-2}$

- **Unidade**

Para se quantificar uma grandeza e realizar uma medição, é necessário estabelecer uma unidade
Exemplos: Joule, Watt, Pascal, bar

I Fundamentos dos Fenômenos de Transporte

Fluido — Líquidos e gases
Deixam superfície livre
Não têm forma própria e, por isso, tomam a forma do recipiente que o contém

Substância que pode escoar
Dependendo do fluido, não resiste a forças paralelas à sua superfície

Mecânica dos fluidos

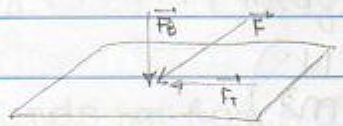
Estuda o comportamento físico dos fluidos e as leis que o rege.

Uso: Escoamento de fluidos em canais e condutos
Lubrificação
Esforços em barragens
Corpos flutuantes
Aerodinâmica

Princípio da aderência

Os pontos de um fluido, em contato com uma superfície sólida, aderem aos pontos dela, com os quais estão em contato. O volume do fluido, sob a ação da força, se deforma continuamente, não alcançando um equilíbrio estático.

Tensão de cisalhamento



$$\tau = \frac{F_T}{A} \quad \left(\frac{N}{m^2}\right)$$

Quando temos um fluido newtoniano, a tensão de cisalhamento é proporcional ao gradiente de velocidade.

P.S Diagrama de velocidades - atrito entre as camadas do fluido

Propriedades dos fluidos

[Viscosidade absoluta] (μ) (dinâmica) (mi)

$$\mu = \frac{\tau}{\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)}$$

$\tau \rightarrow$ Tensão de cisalhamento

$\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \rightarrow$ gradiente de velocidade

$$\rightarrow \frac{N/m^2}{\frac{m/s}{m}} = \frac{N}{m^2} \cdot \cancel{m} \cdot \frac{s}{\cancel{m}} = \left(\frac{N \cdot s}{m^2}\right)$$

A viscosidade dos fluidos é originada por uma coesão entre as moléculas e pelos choques entre elas. Quanto mais viscoso um fluido, menor sua capacidade de escoamento.

[Massa específica] (ρ) (densidade) (rô)

$$\rho = \frac{m}{v} \quad \left(\frac{kg}{m^3}\right)$$

[Densidade relativa] (ρ^*) (rô asterisco)

$$\rho^* = \frac{\rho}{\rho_{H_2O}} \quad \text{adimensional}$$

[Peso específico] (γ) (gama)

$$\gamma = \frac{m \cdot g}{v} \quad \left(\frac{N}{m^3}\right)$$

$$\gamma = \rho \cdot g$$

[Peso específico relativo] (γ^*) (gama asterisco)

$$\gamma^* = \frac{\gamma}{\gamma_{H_2O}} \quad \text{adimensional}$$

Viscosidade cinemática (ν) (nhi)

$\nu = \dfrac{\mu}{\rho}$ → viscosidade abs. / → densidade

$$\nu = \frac{\frac{\tau}{dv/dy}}{\frac{m}{v}} = \frac{\frac{N/m^2}{m/s/m}}{\frac{Kg}{m^3}} = \frac{\frac{N}{m^2}\cdot s}{\frac{Kg}{m^3}} = \frac{N \cdot s}{m^2} \cdot \frac{m^3}{Kg}$$

$$= \frac{N \cdot s \cdot m}{Kg} = \frac{m \cdot m \cdot s}{s^2} = \left(\frac{m^2}{s}\right)$$ → área por segundo

↳ $\dfrac{1N}{1Kg} = \dfrac{m}{s^2}$ $\boxed{1N = 1Kg \cdot \dfrac{m}{s^2}}$

Exemplo: Como uma área cresce no tempo

pluma lançada / simulação para descrever expansão

Sistemas de unidades que possuem F, L, T, M como grandezas primárias

(I) F, L, T → MKS (SI)   (II) M, L, T → MK_fS

Exemplo:

$$[\mu] = \frac{[\tau]}{[\partial v/\partial y]}$$

(I) $\dfrac{F \cdot L^{-2}}{L \cdot T^{-1} \cdot L^{-1}} = F \cdot L^{-2} \cdot T \quad \left(\dfrac{N \cdot s}{m^2}\right)$

Tendo por base, o (I) ↗ (II) $\dfrac{F \cdot T}{L^2} = \dfrac{(M \cdot L^{-2}) \cdot T}{L^2} = \dfrac{M}{LT} \quad \left(\dfrac{Kg_f}{m \cdot s}\right)$

Sistemas métricos

	Força	Massa	Tempo	UTM - unidade técnica de massa
MKS	N	Kg	s	
MK_fS	Kgf	UTM	s	1Kgf = 9,8N

• Dado $\rho^* = 10 \rightarrow \gamma^* = ?$

$$\rho^* = \frac{\rho}{\rho_{H_2O}} \qquad \gamma^* = \frac{\rho \cdot g}{\rho_{H_2O} \cdot g} = \rho^*$$

O peso específico relativo é igual a densidade relativa

$$\boxed{\gamma^* = \rho^*}$$

• Conversão de 70 Kgf para Kg $\qquad 1N = 1Kg \cdot \frac{m}{s^2}$

$$70\,Kgf \cdot \frac{9{,}8\,N}{1\,Kgf} = 686\,N = 686\,Kg \cdot \frac{m}{s^2}$$

$$m = \frac{686}{9{,}8} = 70\,Kg$$

• Aplicando

Dados: $\rho^* = 0{,}8$ (densidade relativa)

$\mu = \frac{10^{-3} \cdot N \cdot s}{m^2}$ (viscosidade absoluta)

$\gamma = ?$ $\quad \gamma = \gamma^* \cdot \gamma_{H_2O} = \rho^* \cdot \rho_{H_2O} \cdot g = 0{,}8 \cdot 9{,}8 \times 10^3 = 7840 \frac{N}{m^3}$

$\nu = ?$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{10^{-3}}{0{,}8 \times 10^3} = 1{,}25 \times 10^{-6} \frac{m^2}{s}$$

[volume específico] (υ) $\qquad \upsilon = \frac{1}{\gamma} \quad \left(\frac{m^3}{N}\right)$

tilibra

Módulo de elasticidade (E) $E = -\frac{dP}{dV/V}$ → diferença de pressão

→ diferença unitária de volume específico

$E = -v \cdot \frac{dP}{dv} \left(\frac{N}{m^2}\right)$

Coeficiente de compressibilidade (β) $\beta = \frac{1}{E} \left(\frac{m^2}{N}\right)$

Fluido real é aquele que escoa sem perdas de energia por atrito. Ou seja, $\mu = 0$ e $\nu = 0$

Fluido ou escoamento incompressível é aquele que o volume não varia se modificada a pressão. Sendo assim, não há variação na densidade.

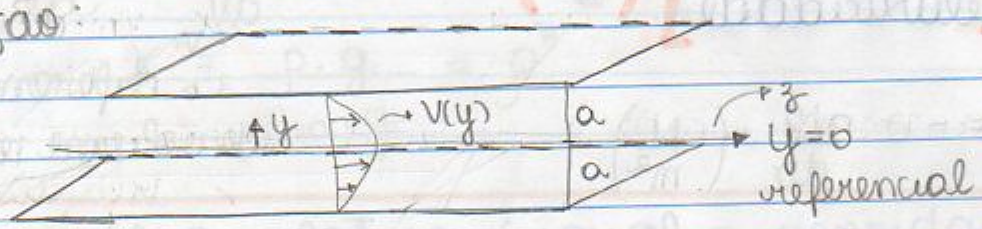
Aplicação das propriedades

① Temos, entre duas placas paralelas, fixas, infinitas e com distância 2a, um fluido que escoa a uma vazão volumétrica Q, que possui uma densidade relativa ρ^* e uma viscosidade cinemática ν. Sabe-se que seu perfil de velocidade é parabólico. Qual a velocidade máxima, a velocidade média e a tensão de cisalhamento?

Dados:

$\nu = 10^{-5}\ m^2/s$ / $\rho^* = 0{,}8$ / $Q = 10\frac{m}{s}$ / $a = 10cm$

Representação:



Considerações

- "Perfil de velocidade parabólico": a distribuição de velocidade entre as placas é parabólica
- Temos um referencial entre as placas: $y=0$
- Placa fixa: velocidade zero, na placa

Resolução

Como o perfil de velocidade é parabólico, temos: $\boxed{V(y) = b_1 y^2 + b_2 y + b_3}$

Temos 3 coeficientes a serem encontrados. Por isso, precisamos de 3 condições de contorno:

→ vazão média

① $V\Big|_{y=-a} = 0$ ② $V\Big|_{y=a} = 0$ ③ $Q = V_{média} \times A$

Área da seção transversal

→ As placas são imóveis, se não V seria diferente de zero.

- Calculando a velocidade média

$V_{média} = \dfrac{Q}{A}$ $Q = \dfrac{10\,L}{s} \rightarrow \left(\dfrac{m^3}{s}\right) \Rightarrow \dfrac{10\,L}{s} \cdot \dfrac{1\,m^3}{1000\,L} = \dfrac{10^{-2}\,m^3}{s}$

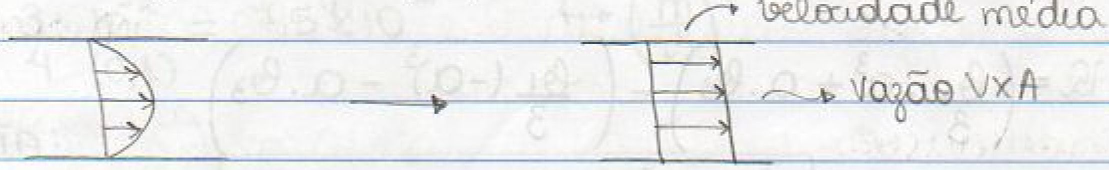
Área da seção transversal: $2a \times \underbrace{1}_{} = 2a$

↳ profundidade infinita (por unidade

$$V_{média} = \frac{0{,}01\ m^3/s}{2.a.1} = \frac{0{,}01\ m^3/s}{2.0{,}1m.1}$$

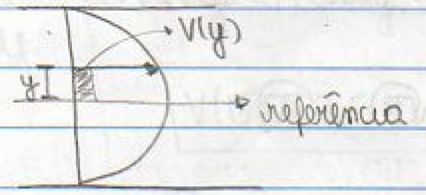
$$= 5\times10^{-2}\ m/s \qquad \boxed{V_{média} = 5\times10^{-2}\ m/s}$$

Esquematizando o perfil de velocidade média:



• Calculando a velocidade máxima

Tomando um elemento infinitesimal



Tendo um perfil de velocidade, se calcula a vazão a qualquer distância da referência através da integral

Temos $dA = dy\times1$ (placas infinitas) e $dQ = V(y).dA$. Assim:

$$Q = \int dQ = \int V(y).dA = \int V(y).dy.1 = \int V(y).dy$$

Para ①: $V(-a) = b_1.(-a)^2 + b_2.(-a) + b_3 = 0$

$$\boxed{a^2.b_1 - a.b_2 + b_3 = 0}$$

Para ②: $V(a) = b_1.a^2 + b_2.a + b_3 = 0$

$$\boxed{a^2.b_1 + a.b_2 + b_3 = 0}$$

Conseguimos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a^2.b_1 - a.b_2 + b_3 = 0 \\ a^2.b_1 + a.b_2 + b_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a^2.b_1 + b_3 = 0} \quad \text{(I)}$$

Então, $b_2 = 0$

Sendo assim, V(y) tem a forma:

$$\boxed{V(y) = y^2 \cdot b_1 + b_3}$$

Integrando para achar Q:

$$Q = \int_{-a}^{a} V(y) \cdot dA = \int_{-a}^{a} [b_1 \cdot y^2 + b_3] \cdot dy \cdot 1 \Rightarrow Q = \left. \frac{b_1}{3} y^3 + y \cdot b_3 \right]_{-a}^{a}$$

$$Q = \left(\frac{b_1}{3} \cdot a^3 + a \cdot b_3 \right) - \left(\frac{b_1}{3} (-a)^3 - a \cdot b_3 \right)$$

$$= \frac{2 \cdot b_1}{3} \cdot a^3 + 2 \cdot b_3 \cdot a$$

$$\boxed{\frac{Q}{2a} = \frac{b_1 \cdot a^2}{3} + b_3} \quad \text{II}$$

Temos um novo sistema com I e II:

$$\begin{cases} b_1 \cdot a^2 + b_3 = 0 \\ \frac{b_1}{3} \cdot a^2 + b_3 = \frac{Q}{2a} \end{cases} \Rightarrow \boxed{b_3 = -b_1 \cdot a^2} \quad \text{III}$$

Substituindo em II:

$$\frac{Q}{2a} = \frac{b_1 \cdot a^2}{3} + (-b_1 \cdot a^2) = b_1 \cdot a^2 \left(\frac{1}{3} - 1 \right) = b_1 \cdot a^2 \cdot \left(-\frac{2}{3} \right)$$

$$\boxed{b_1 = -\frac{3}{4} \cdot \frac{Q}{a^3}} \qquad \boxed{b_3 = \frac{3}{4} \cdot \frac{Q}{a}}$$

Vemos que o perfil de velocidade depende da vazão, da distância entre o referencial e uma das placas e da altura da vazão.

$$\boxed{V(y) = -\frac{3}{4} \cdot \frac{Q}{a^3} \cdot y^2 + \frac{3}{4} \cdot \frac{Q}{a}}$$

Calculando os coeficientes:

$b_1 = -\frac{3}{4} \cdot \frac{10^{-2}}{(0,10)^3} = -7,5$ $\qquad [b_1] = \frac{[V]}{[y^2]} = \frac{L \cdot T^{-1}}{L^2}$

$\rightarrow \left(\frac{1}{(m.s)}\right)$

$[b_1] = L^{-1} \cdot T^{-1}$

$b_3 = \frac{3}{4} \cdot \frac{10^{-2}}{(0,1)} = 7,5 \times 10^{-2} \rightarrow \left(\frac{m}{s}\right)$

Então:

$$\boxed{V(y) = -7,5y^2 + 7,5 \times 10^{-2}}$$

Finalmente, a velocidade máxima:

$\frac{dV}{dy} = 2 \cdot b_1 \cdot y = -15y = 0 \iff y = 0$

$$\boxed{V(0) = 7,5 \times 10^{-2} \, m/s = V_{máx}}$$

• Calculando a tensão de cisalhamento:
Não foi definido o ponto de aplicação da tensão, por isso, encontraremos uma função de y.

μ → viscosidade absoluta

$\mu = \frac{\tau}{dV/dy} \Rightarrow \tau = \mu \cdot \frac{dV}{dy}$ $\qquad$ Sabe-se que $\nu = \frac{\mu}{\rho}$

e $\rho = \rho^* \cdot \rho_{H_2O}$

$\tau = \frac{dV}{dy} \cdot \nu \cdot \rho = \frac{-15}{(m.s)} \cdot y(m) \cdot 10^{-5} \cdot \left(\frac{m^2}{s}\right) \cdot 0,8 \cdot 10^3 \frac{(m^3)}{s}$

$$\boxed{\tau = -0,12y}$$

A tensão cisalhante se opõe ao movimento, por isso é negativa. A viscosidade faz com que o fluido diminua o movimento.

(/ /)

② Há uma tubulação horizontal, e por ela escoa um fluido de densidade relativa ρ^*, viscosidade cinemática ν, com um perfil parabólico $V(r)$, onde r trata-se do raio da tubulação. O fluido possui uma vazão volumétrica Q e o tubo, um comprimento L.

Dados: $\rho^* = 1 \rightarrow$ água $\qquad a = 10\ cm \rightarrow$ raio fixo

$\nu = 10^{-6}\ m^2/s \qquad Q = 10\ L/s$

$L = 2{,}0\ m$

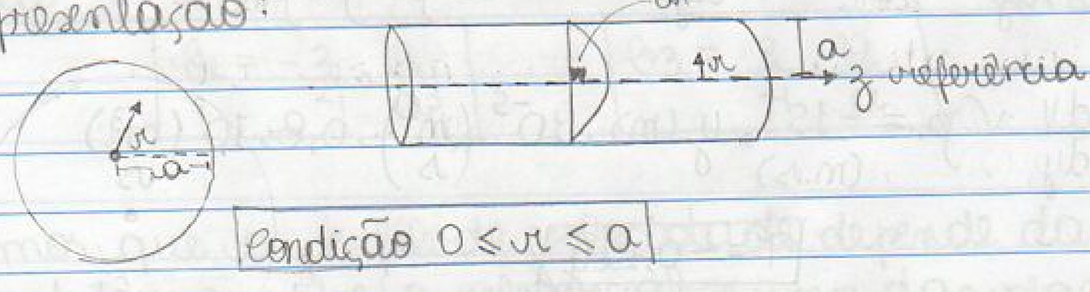
Considerações:

Perfil parabólico de escoamento $\rightarrow$ $\boxed{V(r) = V_{máx}\left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right]}$

A velocidade de entrada é igual à velocidade média do fluido na tubulação.

Qual a velocidade média ($\bar{V}$), a velocidade máxima ($V_{máx}$) e a força cisalhante (F_c)?

Representação:



$\boxed{\text{Condição } 0 \leq r \leq a}$

Resolução

- Encontrando a velocidade máxima ($V_{máx}$)

Temos que, se $r = 0$, então $V = V_{máx}$: $V(0) = V_{máx}$

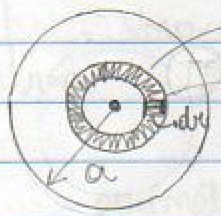
Lembrando que a velocidade é zero na superfície interna da tubulação.

Mais à frente, encontraremos V(0).

• Encontrando a velocidade média ($\bar{V}$):

Sabe-se que $\boxed{Q = \bar{V}.A}$

Para encontrar a área, tomamos um elemento infinitesimal de área.



elemento: anel circular

$$Q = \int dQ = \int V(r).dA$$

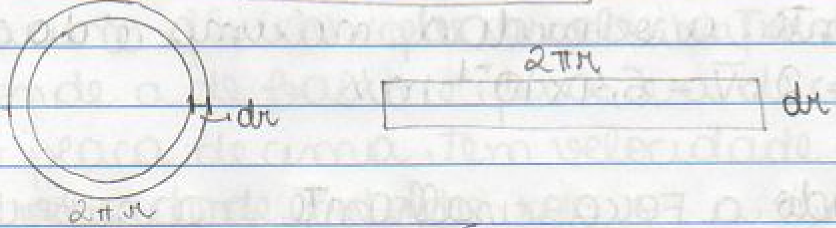
Encontrando o dA:

Caminho ① → Área externa − Área interna do anel

↳ Não, pois obtemos um infinitésimo de segunda ordem

Caminho ② → cálculo por diferenciais

$$A = \pi.r^2 \Rightarrow \boxed{dA = 2\pi.r.dr}$$



Calculando Q: $\begin{cases} dA = 2\pi.r.dr \\ V(r) = V_{máx}\left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right] \end{cases}$

$$Q = \int dQ = \int V(r).dA$$

$$Q = \int_0^a V_{máx}\left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right].2\pi.r.dr = V_{máx}.2\pi \int_0^a \left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right].r.dr$$

$$= V_{máx}.2\pi \int_0^a \left[r - \frac{r^3}{a^2}\right].dr = V_{máx}.2\pi \left(\int_0^a r.dr - \frac{1}{a^2}\int_0^a r^3.dr\right)$$

$$= V_{máx} \cdot 2\pi \left(\frac{r^2}{2} \Big]_0^a - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{r^4}{4} \Big]_0^a \right) = V_{máx} \cdot 2\pi \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} \right)$$

$$= V_{máx} \cdot 2\pi \left(\frac{2a^2 - a^2}{4} \right) \quad \boxed{Q = \frac{V_{máx} \cdot \pi \cdot a^2}{2}} \quad (I)$$

Lembrando que $\boxed{Q = \bar{V} \cdot A = \bar{V} \cdot \pi \cdot a^2}$ (II)

Igualando (I) e (II):

$$\bar{V} \cdot \pi \cdot a^2 = \frac{V_{máx} \cdot \pi \cdot a^2}{2} \Rightarrow \boxed{\bar{V} = \frac{V_{máx}}{2}}$$

Por (II): $\bar{V} = \dfrac{Q}{\pi \cdot a^2} \Rightarrow \bar{V} = \dfrac{\frac{10\,L}{s} \cdot \frac{1\,m^3}{10^3\,L}}{\pi \cdot (0,1)^2}$

$$\boxed{\bar{V} = 3,2 \times 10^{-1}\ m/s}$$

Finalmente, a velocidade máxima é dada:

$$V_{máx} = 2 \cdot \bar{V} = 6,4 \times 10^{-1}\ m/s$$

• Calculando a Força cisalhante na superfície (F_c):

Temos que a Tensão cisalhante é dada por:

$\tau = \dfrac{F_c}{A}$ onde F_c é a Força cisalhante

A área sobre a qual a força atua é a área lateral da Tubulação.

Pela definição de viscosidade absoluta:

$$\tau = \mu \cdot \frac{dV}{dr}$$

$$\frac{F_c}{A} = \mu \cdot \frac{dV}{dr} \Rightarrow \boxed{F_c = A \cdot \mu \cdot \frac{dV}{dr}}$$

Sabendo que $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ e $\rho = \rho^* \cdot \rho_{H_2O}$,

então:

$$\mu = \nu \cdot \rho^* \cdot \rho_{H_2O} \text{ ou seja, } F_c = A \cdot \nu \cdot \rho^* \cdot \rho_{H_2O} \cdot \frac{dV}{dr}$$

Queremos: $F_c\Big|_{r=a} = A \cdot \nu \cdot \rho^* \cdot \rho_{H_2O} \cdot \frac{dV}{dr}\Big|_{r=a}$

$$\frac{dV}{dr}\Big|_{r=a} = V_{máx} \cdot \left(\frac{-2r}{a^2}\right)\Big|_{r=a} = -V_{máx} \cdot \frac{2}{a} = -0{,}64 \cdot \frac{2}{0{,}1} = -12{,}8$$

frequência ← $\left(\frac{1}{s}\right)$

$$A = \overbrace{(2\pi \cdot a)}^{\text{perímetro}} \overbrace{L}^{\text{comprimento}} = 2 \cdot \pi \cdot 0{,}1 \cdot 2 = 1{,}256\ m^2$$

$$F_c = 1{,}256\ m^2 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s} \cdot 1 \cdot 10^3 \frac{Kg}{m^3} \cdot (-12{,}8) \cdot \frac{1}{s}$$

$$= -1{,}6 \times 10^{8}\ \frac{Kg \cdot m}{s^2}$$

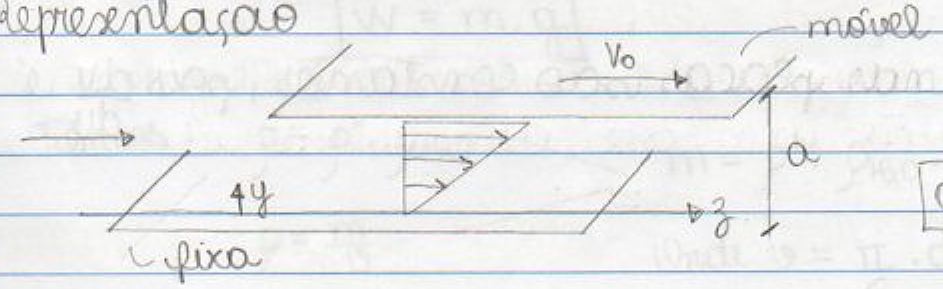
$$\boxed{F_c = -1{,}6 \times 10^{-8}\ N}$$

③ Temos um fluido que escoa entre duas placas, onde a de baixo é fixa e a de cima se move. A placa de cima tem velocidade V_o e o perfil de velocidade é dado por

$$\boxed{V(y) = b_1 \cdot y + b_2}$$

Qual a Tensão cisalhante na placa inferior?

Representação



$\boxed{0 \leq y \leq a}$

Considerações

O referencial fica na placa fixa pois o escoamento não se dá de forma simétrica entre as placas.

Resolução

• Definindo as condições de contorno:

Temos 2 coeficientes a serem encontrados, assim definimos 2 condições de contorno.

$$① \; V\Big|_{y=0} = 0 \qquad\qquad ② \; V\Big|_{y=a} = V_0$$

↳ placa fixa ↳ placa móvel

Por ①: $V(0) = 0 = C_2$, então: $V(y) = C_1 . y$

Por ②: $V(a) = V_0 = C_1 . a \Rightarrow \boxed{C_1 = \frac{V_0}{a}}$

Então, o perfil de velocidade é dado por:

$$\boxed{V(y) = \left(\frac{V_0}{a}\right) . y}$$

• Calculando a tensão cisalhante na placa inferior:

$$\tau\Big|_{y=0} = \mu . \frac{dV}{dy}\Big|_{y=0} = \mu . \frac{V_0}{a} \qquad \boxed{\frac{dV}{dy} = \frac{V_0}{a}}$$

As tensões nas placas são constantes, pois $\frac{dV}{dy}$ é constante.

4) Largando um sólido em forma de esfera, saindo do repouso, dentro da água, pergunta-se: qual a equação da velocidade da esfera?

Força de arrasto

• Dados: $\mu = 10^{-3} \frac{N.s}{m^2}$ $\rho_{H_2O} = 10^3 \frac{Kg}{m^3}$ $F_a = 10^{-2}.V$ velocidade

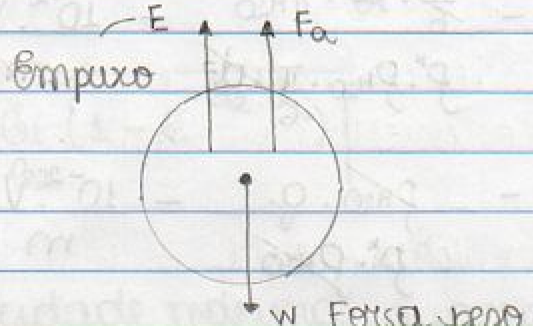
diâmetro

$d = 5mm$ $\rho^* = 1{,}02$ → Esfera com densidade maior que a da água

• Considerações: Devido à viscosidade do fluido e à rugosidade do sólido, Temos uma força de arraste (Fa) (resistência, força de atrito) envolvida. Ela é diretamente proporcional à velocidade.

Empuxo: peso do volume de líquido deslocado pelo corpo

• Representação



• Resolução

Temos que o empuxo é dado por: $\boxed{E = v . \gamma_{H_2O}}$

Sendo $v = \frac{4}{3} . \pi . \frac{d^3}{8}$, então: $\boxed{E = \frac{\pi . d^3}{6} . \gamma_{H_2O}}$

→ Empuxo para esfera na H_2O

Sabe-se que a força peso (W) é dada por:

$\boxed{W = m.g}$

Temos: $\rho = \rho^* . \rho_{H_2O}$

$\rho = \frac{m}{v}$

$m = \rho^* . \rho_{H_2O} . v$

Onde $v = \frac{\pi}{6} . d^3$

Dessa maneira:

$$\boxed{W = \rho^* \cdot \rho_{H_2O} \cdot \frac{\pi}{6} \cdot d^3 \cdot g}$$

Aplicando a segunda lei de Newton para fazer o balanço de forças: $\boxed{F = m \cdot a}$ $\boxed{a = dV/dt}$

Assim: $m \cdot \frac{dV}{dt} = W - E - F_a$

Continuando:

$$m \cdot \frac{dV}{dt} = W - E - 10^{-2} \cdot V \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{W}{m} - \frac{E}{m} - \frac{10^{-2} \cdot V}{m}$$

Sendo $\frac{W}{m} = g$, $E = \frac{\pi \cdot d^3}{6} \cdot \gamma_{H_2O}$ e $m = \rho^* \cdot \rho_{H_2O} \cdot \frac{\pi}{6} \cdot d^3$:

$$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = g - \frac{\cancel{\frac{\pi}{6}} \cdot \cancel{d^3} \cdot \gamma_{H_2O}}{\rho^* \cdot \rho_{H_2O} \cdot \cancel{\frac{\pi}{6}} \cdot \cancel{d^3}} - \frac{10^{-2} \cdot V}{m} \qquad \gamma_{H_2O} = \rho_{H_2O} \cdot g$$

$$\frac{dV}{dt} = g - \frac{\cancel{\rho_{H_2O}} \cdot g}{\rho^* \cdot \cancel{\rho_{H_2O}}} - \frac{10^{-2} \cdot V}{m}$$

$$\frac{dV}{dt} = g\left(1 - \frac{1}{\rho^*}\right) - \frac{10^{-2} \cdot V}{m}$$

Seja $b_1 = g \cdot \left(1 - \frac{1}{\rho^*}\right)$ e $b_2 = \frac{10^{-2}}{m}$, então:

$$\boxed{\frac{dV}{dt} = b_1 - b_2 \cdot V}$$ ← Equação diferencial de primeira ordem

$$\int_0^V \frac{dV}{b_1 - b_2 \cdot V} = \int_0^t dt$$ → Os limites de integração são esses pois a esfera sai do repouso

Usando a regra da substituição:

Seja $y = b_1 - b_2 . V \Rightarrow dV = -\frac{1}{b_2} . dy$

Quando $V = 0 \Rightarrow y = b_1$ ← na EDO

$$\int_0^V \frac{\left(-\frac{1}{b_2}\right) . dy}{y} = -\frac{1}{b_2}\int_0^V \frac{dy}{y}$$

$$= -\frac{1}{b_2}\int_{b_1}^{(b_1 - b_2.V)} \frac{dy}{y} = -\frac{1}{b_2} . \ln|y| \Big|_{b_1}^{(b_1-b_2.V)} = -\frac{1}{b_2}\left[\ln\left|\frac{b_1 - b_2.V}{b_1}\right|\right]$$

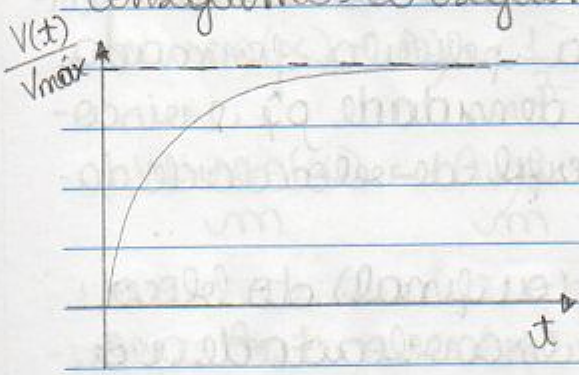
$$t = -\frac{1}{b_2}\left[\ln\left|1 - \frac{b_2}{b_1}.V\right|\right]$$

$$\ln\left|1 - \frac{b_2}{b_1}.V\right| = -b_2.t \Rightarrow 1 - \frac{b_2}{b_1}.V = e^{-b_2.t}$$

$$\boxed{V = \frac{b_1}{b_2}(1 - e^{-b_2.t})}$$

Temos a velocidade máxima quando $t = \infty$, porém queremos calcular uma aproximação. Fazemos $V = 0{,}99 . V_{máx}$:

Conseguimos o seguinte gráfico:



$$\frac{V(t)}{V_{máx}} = 1 - e^{-b_2.t_0}$$

$$0{,}99 = 1 - e^{-b_2.t_0}$$

$$e^{-b_2.t_{99\%}} = 0{,}01$$

$$\ln(0{,}01) = -b_2.t_{99\%} \Rightarrow t_{99\%} = -\frac{\ln(0{,}01)}{b_2}$$

Calculando b_2:

$$b_2 = \frac{10^{-2}}{m}$$

$$m = \rho^* \cdot \rho_{H_2O} \cdot \frac{\pi}{6} \cdot d^3 = 6{,}7 \times 10^{-5}\,kg$$

$$\boxed{b_2 = 149{,}7}$$

Calculando $t_{99\%}$: $t_{99\%} = \frac{-\ln(0{,}01)}{149{,}7} = 0{,}03\,s$

A esfera atinge a velocidade Terminal em 0,03 s.

Encontrando a velocidade:

$$b_1 = g\left(1 - \frac{1}{\rho^*}\right) = 9{,}8 - \frac{9{,}8}{1{,}02} = 0{,}19$$

$$\boxed{V_{máx} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{0{,}19}{149{,}7} = 1{,}27 \times 10^{-3}\,m/s}$$

Podemos ainda calcular o espaço percorrido até atingir a velocidade terminal:

$$S = \int_0^{0{,}03 - t_0} V(t)\,dt = V_{máx} \cdot \left(t + \frac{1}{b_2} \cdot e^{-b_2 \cdot t}\right)\Bigg|_0^{0{,}03}$$

$$\boxed{S = 2{,}99 \times 10^{-5}\,m}$$

5) Em um plano que possui uma inclinação α, há um bloco de densidade ρ^*_B e aresta "a". O bloco parte do repouso e sob ele há uma película formada por um fluido, que tem uma densidade ρ^*_f e viscosidade ν. O fluido tem um perfil de velocidade dado por: $V(y) = c\,y^{1/3}$ $(0 \leq y \leq h)$.

Qual a velocidade Terminal (ou final) do bloco, o tempo gasto para alcançar essa velocidade e o espaço percorrido até chegar a ela?

Dados: Bloco $\rho^*_B = 2{,}0$ $a = 10\,cm$ | $\alpha = 5°$

Fluido $\rho^*_F = 0{,}8$ $\nu = 8 \times 10^{-5}$ $h = 10^{-3}\,m$

Representação

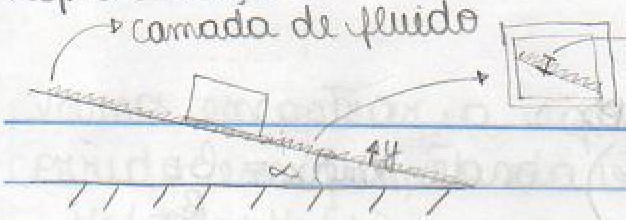
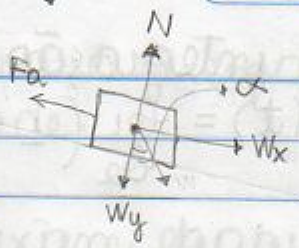


Diagrama de corpo livre



Resolução

Primeiramente, fazemos um balanço de forças.

Temos que: $W_x - F_a = F$ $\quad a = \frac{dV}{dt}$

$\Rightarrow W.\,sen(\alpha) - F_a = m.\frac{dV}{dt}$ (1)

Sabemos que $\tau = \mu.\frac{dV}{dy}$. Como $F_a = \frac{\tau}{A}$, então: $F_a = A.\mu.\frac{dV}{dy}$

A velocidade do bloco fica igual à do fluido na superfície de contato sólido/fluido, então:

V_B: velocidade do bloco h: altura da camada de fluido

$V(h) = V_B = C h^{1/3} \Rightarrow C = \frac{V_B}{h^{1/3}}$

Sendo $\frac{dV}{dy} = \frac{1}{3}.C.y^{-2/3}$, encontramos a equação para

Fa: $F_a = A.\mu.\left(\frac{1}{3}.\frac{V_B}{h^{1/3}}.h^{-2/3}\right) = A.\mu.\frac{1}{3}.\frac{V_B}{h}$

Substituindo em (1):

$W.\,sen(\alpha) - A.\mu.\frac{1}{3}.\frac{V_B}{h} = m.\frac{dV_B}{dt}$

$\frac{W.\,sen(\alpha)}{m} - \frac{A.\mu}{m}.\frac{1}{3}.\frac{V_B}{h} = \frac{dV_B}{dt}$

Seja $b_1 = g\,sen(\alpha)$ e $b_2 = \frac{A.\mu}{3h.m}$, temos:

$$\boxed{\frac{dV_B}{dt} = b_1 - b_2.V_B}$$

/ /

Após a integração, teremos:

$$V_B(t) = \frac{b_1}{b_2}\left(1 - e^{-b_2 . t}\right) \text{ onde } V_{máx} = \frac{b_1}{b_2}$$

A velocidade máxima indica que $F_a = W . sen(\alpha)$, ou seja, que $\frac{dV_B}{dt} = 0$.

Encontrando a velocidade máxima:

$$V_{máx} = \frac{b_1}{b_2} \quad b_1 = g . sen(\alpha) = 9,8 . sen(5°) = 0,85$$

$$b_2 = \frac{A . \mu}{3h . m} \dashrightarrow \mu = ? \quad m = ?$$

Calculando μ:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho_f} \Rightarrow \mu = \nu . \rho_f \quad \rho = \rho^* . \rho_{H_2O}$$

$$\boxed{\mu = \nu . \rho_f^* . \rho_{H_2O}}$$

$$\mu = 8 \times 10^{-5} . 0,8 . 10^3 = 6,4 \times 10^{-2} \frac{N.s}{m^2}$$

Calculando m:

$$\rho_B = \frac{m}{v} \Rightarrow m = \rho_B . v \Rightarrow \boxed{m = \rho_B^* . \rho_{H_2O} . v}$$

$$m = 2 . 10^3 . (0,1)^3 = 2 kg$$

Encontrando b_2:

$$b_2 = 0,11 \Rightarrow V_{máx} = \frac{0,85}{0,11} = 7,73 \, m/s$$

Lembrando que o tempo para alcançar a velocidade terminal pode ser dado pela seguinte aproximação: $t_{99\%} = \frac{-\ln(0,01)}{b_2}$

$$\boxed{t_{99\%} = \frac{4,61}{0,11} = 41,9 \, s}$$

tilibra

Vamos encontrar a equação para o espaço percorrido em função da velocidade:

$$V_B(t) \Rightarrow V_B(s)$$
?

$$\frac{dV_B}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = b_1 - b_2 \cdot V_B(s)$$

$\hookrightarrow V_B(t) \Rightarrow \boxed{V_B(s) \cdot \frac{dV_B(s)}{ds} = b_1 - b_2 \cdot V_B(s)}$

Integrando:

$$\int_0^{V_B} \frac{V_B(s) \cdot dV_B(s)}{(b_1 - b_2 \cdot V_B(s))} = \int_0^S ds$$

Por substituição,

$$z = b_1 - b_2 \cdot V_B(s) \Rightarrow dz = -b_2 \cdot dV_B(s)$$

$$dV_B(s) = -\frac{dz}{b_2}$$

Modificando os limites de integração:

Se $V_B = 0 \Rightarrow b_1 = 0$

$$\int_{b_1}^{(b_1 - b_2 \cdot V_B)} \frac{\left(\frac{b_1 - z}{b_2}\right) \cdot \left(\frac{-dz}{b_2}\right)}{z} = \int_{b_1}^{(b_1 - b_2 \cdot V_B)} \frac{z - b_1}{b_2} \cdot \frac{dz}{b_2} \cdot \frac{1}{z} \cdot dz$$

$$= \int_{b_1}^{(b_1 - b_2 \cdot V_B)} \frac{z - b_1}{b_2^2 \cdot z} \cdot dz = \frac{1}{b_2^2} \int_{b_1}^{(b_1 - b_2 \cdot V_B)} \left(1 - \frac{b_1}{z}\right) \cdot dz$$

$$= \frac{1}{b_2^2} \Big[z - b_1 \ln|z| \Big]_{b_1}^{(b_1 - b_2 \cdot V_B)}$$

$$= \frac{1}{b_2^2}\left[\left(b_1 - b_2 . V_B - b_1 . \ln|b_1 - b_2 . V_B|\right) - \left(b_1 - b_1 . \ln|b_1|\right)\right]$$

$$S(V_B) = -\frac{1}{b_2^2}\left[b_1 . \ln\left|1 - \frac{b_2}{b_1} . V_B\right| + b_2 . V_B\right]$$

Calculando a distância percorrida até alcançar a velocidade final:

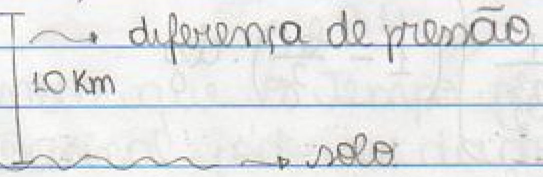
$$S(7{,}73) = -\frac{1}{0{,}11^2}\left[0{,}85 . \ln|1 - 0{,}99| + 0{,}11 . 0{,}99 . 7{,}73\right]$$

$$\boxed{S = 253.93\ m}$$

* Geralmente, o teste de viscosidade é feito em função do tempo. Exemplo: óleo por numeração

⑥ Temos o ar atmosférico sobre o solo (considere o ar como um gás perfeito). Seja $\rho^*_{ar} = 10^{-3}$ e que a pressão seja $p = 1{,}033 \times 10^5$ Pa e $T = 300K$.
Qual o valor do módulo de elasticidade para o ar a 10 mil metros?

Representação



Resolução

Um gás perfeito obedece à equação

$$p . V = n . R . T$$

P: pressão R: constante universal dos gases
v: volume específico T: Temperatura em K
n: número de moles do gás

* Um gás perfeito possui colisões moleculares perfeitamente elásticas *

Como T = 300K, ou seja, é constante seja qual for a distância em relação ao solo, temos uma transformação isotérmica.

$$p.v = \underbrace{n.R.T}_{=c} \rightarrow \text{constante}$$

Assim: $\frac{d}{dv}(p.v) = \frac{d}{dv}(c) \Rightarrow \frac{dp}{dv}.v + \frac{dv}{dv}.p = 0$

$\Rightarrow p + v.\frac{dp}{dv} = 0 \Rightarrow p - E = 0$

Conclui-se que, em uma transformação isotérmica, o módulo de elasticidade é igual à diferença de pressão.

→ O que afeta a Força de arraste é a Força de sustentação

A Fa surge devido ao movimento do fluido ao redor do sólido

└ Fatores: viscosidade do fluido e rugosidade do sólido

└ Exemplo de atuação da Fa:

- Força do vento sobre postes → Estudo do regime de ventos de uma localidade
- Força do vento sobre aeronaves

/ /

A força de arraste depende de um número (Número de Reynolds - Re). Ele é muito usado em mecânica dos fluidos e hidráulica e define o tipo de escoamento:

- Para $Re < 2000$ - escoamento laminar
  - Lento, geralmente ocorre em laboratório
- Para $Re > 5000$ - escoamento turbulento
  - geralmente acontece na natureza

OBS: Para Re entre 2000 e 5000, temos um escoamento transitório, um regime que pouco se sabe sobre ele.

Definindo o número de Reynolds:

$$Re = \frac{\text{Forças inerciais}}{\text{Forças viscosas}} \leftarrow \text{adimensional}$$

$$Re = \frac{V \cdot L}{\nu}$$

V: velocidade do fluido
L: comprimento característico do sólido
ν: viscosidade cinemática

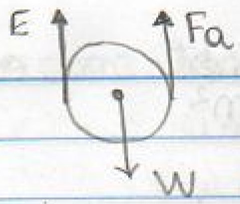
Para encontrar a força de arraste é necessário saber o número de Reynolds.

Comprimento característico: $L = \frac{\text{Volume}}{\text{Área}}$

Para a esfera $\frac{Vol}{Área} = \frac{4/3 \cdot \pi \cdot R^3}{4 \cdot \pi \cdot R^2} = \frac{\text{diâmetro}}{6}$

Número de Reynolds → Serve para avaliações - real e projetado

Exemplo: Esfera num fluido



$Fa = Cd . A_f . \gamma . \frac{v^2}{2g}$ Cd: Coeficiente de arrasto
Af: Área frontal

↳ Para qualquer fluido passando por sólido ou sólido pelo fluido.

A área frontal é aquela que o sólido enxerga. No caso de uma esfera: $A_f = \pi . R^2$

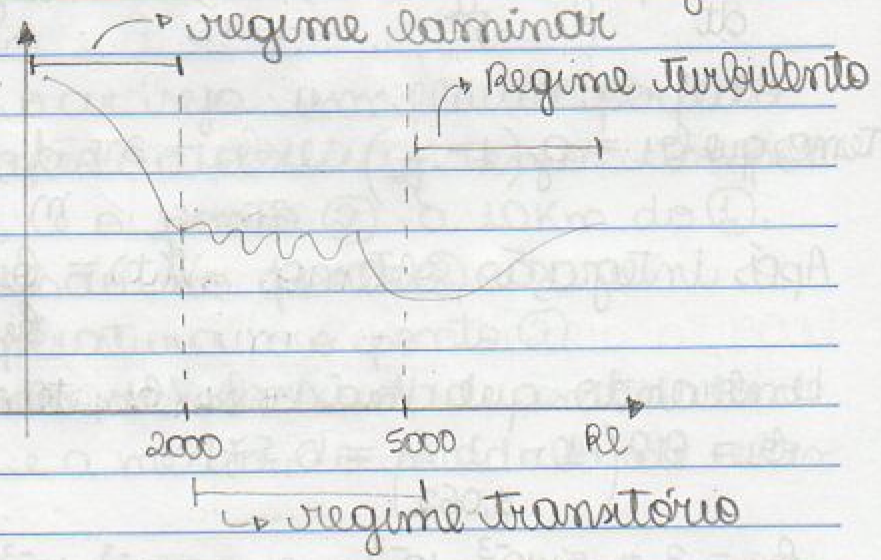
O coeficiente de arrasto depende do número de Reynolds, consequentemente, dependendo do tipo de escoamento.

Gráfico: Coeficiente de arrasto x Número de Reynolds

$\boxed{Cd = \frac{24}{Re}}$

↳ Para um regime laminar

gráfico em escala logarítmica



⑦ Outra versão da questão ④

Para uma esfera em um regime laminar, temos:

$\boxed{Fa = 3\pi . d . \mu . V}$

/ /

Dados: $d = 5\,mm$ $\mu = 10^{-3}\ \frac{N.s}{m^2}$

$\rho_s = 1{,}062 \times 10^3\ \frac{Kg}{m^3}$

Nessa versão, temos a mudança da equação da força de arrasto e dos dados utilizados.

Relembrando que para uma esfera:

$E = \frac{\pi . d^3}{6} . \gamma_{H_2O}$ $W = \underbrace{\rho^* . \rho_{H_2O} . \frac{\pi}{6} . d^3}_{m} . g$

Qual o menor comprimento que o tubo deve ter para se medir a velocidade final da esfera?

Fazendo o balanço de forças:

$m . \frac{dV}{dt} = W - E - Fa \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{W}{m} - \frac{E}{m} - Fa$

$\frac{dV}{dt} = g - \frac{g}{\rho^*} - \frac{3\pi . d . \mu . V}{m} = g\left(1 - \frac{1}{\rho^*}\right) - \frac{3\pi . d . \mu}{m} . V$

Temos que $b_1 = g\left(1 - \frac{1}{\rho^*}\right)$ e $b_2 = \frac{3\pi . d . \mu}{m}$.

Após integração, obtemos $V(t) = \frac{b_1}{b_2}\left(1 - e^{-b_2 . t}\right)$

Lembrando que $V_{máx} = b_1 / b_2$, temos:

$b_1 = 9{,}8\left(1 - \frac{1}{1{,}062}\right) = 0{,}57$

$b_2 = \frac{3 . \pi . 5\times10^{-3} . 10^{-3}}{m} = \frac{3\pi . 5\times10^{-3} . 10^{-3}}{1{,}062 . 10^3 . \frac{\pi}{6} . (5\times10^{-3})^3} = 0{,}68$

$V_{máx} = \frac{0{,}57}{0{,}68} = 0{,}83\ m/s = 8{,}3\times10^{-1}\ m/s$

Sendo assim, $V(t) = 8{,}3\times10^{-1}\left(1 - e^{-0{,}68 . t}\right)$

Lembrando que uma aproximação para o tempo, para alcançar a velocidade terminal é dado por $t_{99\%} = \frac{-\ln(0,01)}{b_2} = \frac{4,61}{0,68} = 6,78\,s$

Encontrando o espaço percorrido até 6,78 s:

$$S = \int_0^{6,78} V(t).dt = 0,83\left[t + \frac{1}{0,68}\cdot e^{-0,68.t}\right]_0^{6,78}$$

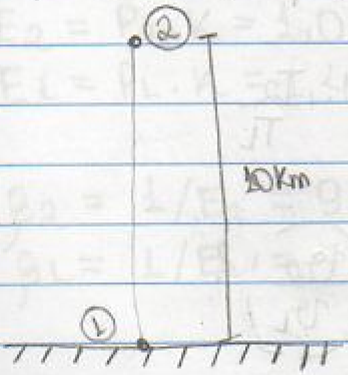
$$= \left\{0,83\left[6,78 + \frac{1}{0,68}\cdot e^{-0,68\cdot 6,78}\right]\right\} - \left\{0,83\left[0 + \frac{1}{0,68}\right]\right\}$$

$$= 5,64 - 1,22 = 4,42\,m$$

O tubo deve ter, no mínimo, 4,42 m de comprimento.

⑧ Considere que o ar seja um fluido perfeito e em transformação adiabática. Temos um ponto no solo, o ①, e o ponto ② a 10 Km do ①.
Pede-se: a) A pressão no ponto ②
b) Temperatura no ponto ②
c) Módulo de elasticidade, módulo de compressibilidade e a média do módulo de elasticidade.

Representação



Dados

$\rho_1^* = 10^{-3}$ $T_1 = 300\,K$ $P_1 = 1\,atm$

$\rho_2 = \rho_1 \cdot 0,8$

$1\,atm = 1,013 \times 10^5\,Pa$

/ /

Para uma transformação adiabática temos que $p \cdot v^K = C$, onde C é uma constante e K é

$K = \frac{C_p}{C_v}$ C_p → calor específico molar a P constante; C_v → calor específico molar a v constante

K=1,4 para o ar atmosférico!

Resolução

Sendo o ar considerado um gás perfeito, então:

$$p \cdot v = m \cdot R \cdot T$$

a) Temos que

$$p_1 \cdot v_1^K = p_2 \cdot v_2^K \Rightarrow \frac{p_2}{p_1} = \frac{v_1^K}{v_2^K}$$

Lembrando que $v = 1/\gamma$, onde $\gamma = \rho \cdot g$.

$$\frac{v_1^K}{v_2^K} = \frac{\left(\frac{1}{\rho_1 \cdot g}\right)^K}{\left(\frac{1}{\rho_2 \cdot g}\right)^K} = \frac{p_2}{p_1} \Rightarrow \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^K = 0,80^{1,4}$$

$$\boxed{p_2 = 0,73 \cdot p_1}$$

Logo, a pressão no ponto ② é:

$$\boxed{p_2 = 7,3949 \times 10^4 \text{ Pa}}$$

b) Para achar a Temperatura no ponto ②

$$p \cdot v = m \cdot R \cdot T$$

$$p_1 \cdot v_1 = m \cdot R \cdot T_1$$

$$p_2 \cdot v_2 = m \cdot R \cdot T_2$$

$$\frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{v_2}{v_1} = \frac{\cancel{m} \cdot R}{\cancel{m} \cdot R} \cdot \frac{T_2}{T_1}$$

$$\Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = 0,73 \cdot \left(\frac{v_2}{v_1}\right) ?$$

Lembrando que:

$$\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^K = \frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^K = 0,80^{1,4} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = 0,80$$

$$\Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{0,8} = 1,25$$

Desta maneira: $\frac{T_2}{T_1} = 0,73 \cdot 1,25 = 0,91$

$$\boxed{T_2 = 300 \cdot 0,91 = 273\ K}$$

c) Lembrando que: $E = -\frac{dP}{\left(\frac{dv}{v}\right)} = -\frac{dP}{dv} \cdot v$

Como $p \cdot v^K = C$: $\frac{d(p \cdot v^K)}{dv} = \frac{d}{dv}(C)$

$$\Rightarrow v^K \cdot \frac{dP}{dv} + p \cdot K \cdot v^{K-1} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{v^K \cdot \frac{dP}{dv} + P \cdot K \cdot v^{K-1}}{v^{K-1}} = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{v \cdot \frac{dP}{dv}}_{-E} + p \cdot K = 0 \Rightarrow \boxed{E = P \cdot K}$$

$$\boxed{\beta = \frac{1}{P \cdot K}}$$

Assim,

$E_2 = P_2 \cdot K = 1,035 \times 10^5\ N/m^2$

$E_1 = P_1 \cdot K = 1,418 \times 10^5\ N/m^2$

$\beta_2 = 1/E_2 = 9,66 \times 10^{-6}\ m^2/N$

$\beta_1 = 1/E_1 = 7,05 \times 10^{-6}\ m^2/N$

calculando o módulo de elasticidade médio:

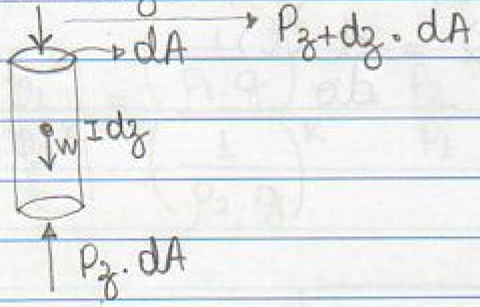
$$E_m = \frac{(E_1+E_2)}{2} = 1,227\times10^5\ N/m^2$$

errado!

Na realidade, o E médio é calculado por uma média ponderada:

$$\bar{E} = \frac{\int E(z).dz}{\int dz} = \frac{\int_0^{10^4} p(z).K\,dz}{\int_0^{10^4} dz} = \frac{K}{10^4}\int_0^{10^4} p(z).dz$$

Quem é $P(z)$?



$$\boxed{W = \gamma.dA.dz}$$

· Fazendo o balanço de forças:

$$P_z.\cancel{dA} - P_{z+dz}.\cancel{dA} - \gamma.dz.\cancel{dA} = 0$$

$$P_z - P_{z+dz} = \gamma.dz$$

$$P_{z+dz} = P_z + dP_z \quad \Rightarrow \quad dP = -\gamma.dz$$

Temos $P.v^K = C \Rightarrow P.\left(\frac{1}{\gamma}\right)^K = C \Rightarrow \frac{P}{C} = \gamma^K$

$$\Rightarrow \gamma = \sqrt[K]{\frac{P}{C}}$$

Onde $C = P_1.v_1^K = 1,013\times10^5.\left(\frac{1}{\rho_1.g}\right)^{1,4}$

$P(z) = ?$ $\quad \frac{dP}{\gamma} = -dz \Rightarrow \frac{dP}{\left(\frac{1}{C}\right)^{1/4} \cdot P^{1/K}} = -dz$

$$\Rightarrow C^K \cdot \frac{dP}{P^{1/K}} = -dz \Rightarrow C^K \int_{P_1}^{P} \frac{dP}{P^{1/K}} = -\int_0^z dz$$

$$\Rightarrow C^K \left(\frac{1}{-1/K+1}\right) \cdot P^{(-1/K+1)} \Big|_{P_1}^{P} = -z$$

$$\Rightarrow P^{\left(\frac{K-1}{K}\right)} - P_1^{\left(\frac{K-1}{K}\right)} = \frac{-1}{C^{1/K}} \cdot \left(\frac{K-1}{K}\right) \cdot z$$

$$\Rightarrow P^{0{,}29} - P_1^{0{,}29} = -\frac{1}{C^{1/K}} \cdot 0{,}29 \cdot z$$

$$\Rightarrow \quad P = \left(P_1^{0{,}29} - \frac{1}{C^{1/K}} \cdot 0{,}29 \cdot z\right)^{1/0{,}29}$$

Encontrando o módulo de elasticidade médio:

$$\bar{E} = \frac{K}{10^4} \int_0^{10^4} P(z) \cdot dz$$ ← Definir o valor de P_1